# 2原子非線形格子におけるDiscrete Breatherの存在と安定性 (非線形波動現象の数理と応用)



吉村, 和之

数理解析研究所講究録
第 1645 巻 2009 年 72-79



# 2原子非線形格子における Discrete Breather の存在と安定性

NTT コミュニケーション科学基礎研究所　吉村 和之 (Kazuyuki Yoshimura)
NTT Communication Science Laboratories

**概要**

Discrete Breather とは，非線形格子系における空間的に局在した周期振動解である．2原子 Fermi-Pasta-Ulam 型格子に関し，種々のタイプの Discrete Breather 解の存在証明を与えた．加えて，それらの線形安定性を厳密に評価した．

## 1　はじめに

非線形格子系においては，系の離散性と非線形性に起因して，空間的に局在した振動モードが存在し得ることが知られている．この局在モードは，Discrete Breather (ＤＢ)，または，Intrinsic Localized Mode (ＩＬＭ) と呼ばれている．ＤＢの存在は，武野らにより最初に指摘され [1, 2]，以来，ＤＢに関する多数の研究がなされている (例えば，レビュー論文 [3, 4, 5] 参照)．ＤＢの存在は，非線形性と空間的離散性を有する力学系において普遍的な現象と考えられており，実際に種々の系において実験的に観測されている．例えば，ジョセフソン結合素子系 [6, 7]，非線形光導路アレイ [8]，マイクロカンチレバーアレイ [9] 等で観測されている．

数理的な観点からは，ＤＢは運動方程式の空間的に局在した周期解として特徴付けられる．これまでに，ＤＢを表す局在周期解の厳密な存在証明が，種々の手法により与えられている．最初の存在証明は，Mackey と Aubry により，各粒子がオンサイトポテンシャルと弱い相互作用ポテンシャルを持つような非線形格子系のクラスに対して与えられた [10]．例えば，非線形 Klein-Gordon 格子モデルなどが，このクラスに含まれる．anti-integrable limit，もしくは，anti-continuous limit と呼ばれる相互作用が無い極限では，系は，各粒子がオンサイトポテンシャル中を独立に振動する振動子集団となる．この極限では，1個の粒子だけが周期振動をし，他の粒子が静止しているような自明な局在周期解が存在する．Mackey と Aubry は，周期関数の空間で陰関数定理を用いて，自明な局在周期解が弱い相互作用が在る場合に延長可能であることを証明している．anti-continuous limit にて複数個の粒子が振動するような自明な局在周期解の延長に関する証明も与えられている [11]．文献 [12] では，2原子 Fermi-Pasta-Ulam (FPU) 型格子に関して，上記とは異なるタイプの anti-continuous limit が提案されている．2原子 FPU 型格子とは，異なる質量を持つ粒子が交互に並び，再隣接粒子が非線形相互作用する格子である．この系において，質量比がゼロとなる極限が anti-continuous limit となり，重い粒子が静止した状態で軽い粒子のみが独立に振動する．この極限では，1個の軽い粒子のみ振動し他の粒子が静止状態であるような自明なＤＢ解が存在する．Livi らは，このＤＢ解が質量比がゼロでない場合に延長可能であることを証明している．上記以外の anti-continuous limit を持たないような格子系に対しても，異なる手法により，ＤＢ解の存在証明が与えられている [13, 14, 15]．

上述のように，種々の格子系において，ＤＢ解の存在については厳密に示されている．一方，ＤＢに関する他の重要な問題として，その安定性評価が挙げられる．しかしながら，ＤＢ解の線形安定性解析を厳密に行う為の解析的手法は未だ充分に確立されていない．そのため，ＤＢ解の線形安定性に関する厳密な結果は限られている．オンサイトポテンシャルと弱相互作用ポテンシャルを持つ格子系について，single-site ＤＢ（１粒子のみが大きな振幅を持つＤＢ）[3]，および，Morse型オンサイトポテンシャルでの three-site ＤＢ [11] の線形安定性が示されている程度である．これ以外の格子系，ＦＰＵ型の格子系などについては，線形安定性を評価する手法が提案されておらず，厳密な結果は知られていない．

本研究では，ＤＢの存在証明，および，厳密に線形安定性解析を行う手法を提案する．２原子ＦＰＵ型非線形格子において，質量比が小さい条件下で，single-site ＤＢ，および，multi-site ＤＢの存在を示す．さらに，それらの各ＤＢに対し線形安定性評価を与える．提案手法では，まず，同次ポテンシャル格子の anti-continuous limit（質量比＝０）を考え，自明なＤＢ解を構成する．次に，そのＤＢ解を質量比が正の領域に延長可能であることを示し，延長されたＤＢ解に関するモノドロミー行列の固有値（特性乗数）分布を評価する．最後に，同次系の特性乗数分布の情報を利用して，ＤＢ解を非同次ポテンシャルの場合に延長し，延長されたＤＢ解の特性乗数分布が同次系の特性乗数分布と定性的に同じ，すなわち，同じ線形安定性を持つことを示す．一般には，与えられた周期解の特性乗数を解析的に求めることは不可能であるが，同次ポテンシャルを持つハミルトン系の場合には，これが可能となる．提案手法では，ＤＢ解を同次系を経由して延長することにより，この事実を利用した線形安定性評価を行っている．２原子ＦＰＵ型非線形格子以外の格子モデル，例えば，３原子非線形格子や，オンサイトと弱相互作用ポテンシャルを持つ格子系などにも，提案手法は適用できると思われる．

## 2　２原子ＦＰＵ型格子モデル

本研究では，直線上に並んだ粒子が再隣接粒子と非線形相互作用するような１次元２原子非線形格子系を考える．系のハミルトニアンは次式で与えられる．

$$H = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2m_n} P_n^2 + \sum_{n=1}^{N} V(Q_n - Q_{n-1}), \tag{1}$$

ここで $Q_n \in \mathbb{R}$，$P_n \in \mathbb{R}$ は，それぞれ，粒子の座標と運動量を表す．$N$ は偶数とする．$m_n$ は，$n$ 番目の粒子の質量を表し，$m_{2j-1} = 1$，$m_{2j} = m$，$j = 1, 2, \ldots, N/2$，ただし，$m > 1$ とする．境界条件としては，固定端条件 $Q_0 = Q_N = 0$ を仮定する．したがって，系の自由度は $N-1$ である．相互作用ポテンシャル $V$ として，以下の形を仮定する．

$$V(X) = \sum_{r=2}^{k} \frac{\kappa_r}{r} X^r, \tag{2}$$

ここで，$k \geq 4$ は偶数，$\kappa_r \in \mathbb{R}, r = 2, \ldots, k$ は定数，最高次の係数 $\kappa_k$ は $\kappa_k > 0$ とする．一般性を失うことなく $\kappa_k = 1$ とできるので，以下では，$\kappa_k = 1$ とする．他の係数について，$\kappa = (\kappa_2, \ldots, \kappa_{k-1})$ と略記する．

本稿で示す結果は，充分大きな $m$ に対して成立するものである．極限 $m \to \infty$ には，特異性があるかのように見えるが，実際には，以下で定義するパラメータ $\varepsilon$ を導入すれば，この極限に特異性は無いこ

とが分かる [12].

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{m}}. \tag{3}$$

パラメータ $\varepsilon$ を用いて，新座標変数 $q_n$ を以下のように定義する．

$$q_n = \begin{cases} Q_n & \text{if } n = 2j-1, \\ \varepsilon^{-1} Q_n & \text{if } n = 2j, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, N/2. \tag{4}$$

新変数では，ハミルトニアン (1) は，以下のように変換される．

$$H = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2} p_n^2 + \sum_{j=1}^{N/2} \Big[ V(\varepsilon q_{2j} - q_{2j-1}) + V(q_{2j-1} - \varepsilon q_{2j-2}) \Big], \tag{5}$$

ただし，$p_n$ は $q_n$ に共役な運動量であり，$p_{2j-1} = P_{2j-1}$，$p_{2j} = \varepsilon P_{2j}$ のように定義される．境界条件は，$q_0 = q_N = 0$ である．ハミルトニアン (5) より導出される運動方程式は，次式で与えられる．

$$\ddot{q}_{2j-1} = V'(\varepsilon q_{2j} - q_{2j-1}) - V'(q_{2j-1} - \varepsilon q_{2j-2}), \tag{6}$$

$$\ddot{q}_{2j} = \varepsilon V'(q_{2j+1} - \varepsilon q_{2j}) - \varepsilon V'(\varepsilon q_{2j} - q_{2j-1}). \tag{7}$$

これらの運動方程式は，$\varepsilon = 0$ においては，互いに分離することが分かる．以下では，変数 $q_n, p_n$ を用い，ハミルトニアン (5) に対して結果の記述を行うものとする．

## 3 主結果

同次ポテンシャル系の anti-continuous limit，すなわち，$\varepsilon = 0$ かつ $\kappa_r = 0$, $r = 2, \ldots, k-1$ の場合を考える．この場合，以下の形をした運動方程式 (6), (7) の周期解が存在することを示すことができる．

$$q_{2j-1} = 2^{-1/(k-2)} \sigma_{2j-1} \varphi(t), \quad q_{2j} = 0, \qquad j = 1, \ldots, N/2, \tag{8}$$

ここで，$\sigma_{2j-1} \in \{-1, 0, 1\}$ であり，$\varphi(t)$ は以下の微分方程式の周期解を表す．

$$\ddot{\varphi} + \varphi^{k-1} = 0. \tag{9}$$

これは，同次ポテンシャル中を振動する 1 粒子の運動を記述する方程式と見なすことができ，明らかに，周期解を持つことが分かる．方程式 (9) は，積分

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{k}\varphi^k = h \tag{10}$$

を持つ．式中の $h > 0$ は積分定数である．解 $\varphi(t)$ の周期 $T$ は，定数 $h$ に依存し，次式で与えられる．

$$T = 2\sqrt{2}\, h^{-(1/2-1/k)} \int_0^{k^{1/k}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^k/k}}\, dx. \tag{11}$$

式中の積分値は $h$ に依存しないので，$h$ が 0 から $+\infty$ まで変化するときに，周期 $T$ が $+\infty$ から 0 まで連続的に変化する．このことは，任意に与えられた $T > 0$ に対し，$T$ を周期に持つような (9) 式の周期解 $\varphi(t)$

が常に存在することを意味している．したがって，任意に与えられた $\sigma=(\sigma_1,\sigma_3,\ldots,\sigma_{2j-1},\ldots,\sigma_{N-1})\in\{-1,0,1\}^{N/2}$ と $T>0$ に対し，(8) 式で与えられる周期 $T$ の運動方程式の解が存在する．この周期解を，$\Gamma_0(t;\sigma,T)$ と表すことにする．すなわち，(8) 式で与えられる $q_n$ と $p_n=\dot{q}_n$ を用いて，$\Gamma_0(t;\sigma,T)=(q_1(t),\ldots,q_{N-1}(t),p_1(t),\ldots,p_{N-1}(t))$ である．

$n_0$ をあるサイトの番号とする．(8) 式の形をし，$n_0$ 周辺の数サイトのみが励起されているような局在周期解，すなわち，ＤＢ解を考える．本稿では，以下に挙げる６種類のコード列 $\sigma$ を考えることにする．１番目のコード列は，

$$\sigma_+=(\ldots,0,1,0,\ldots) \tag{12}$$

であり，$\sigma_n=0$, $(n\neq n_0)$ である．$n_0$ は，$3\le n_0\le N-3$ を満たす奇数としておく．このコード列は，single-site DB を表している．２番目，３番目のコード列は，

$$\sigma_{++}=(\ldots,0,1,1,0,\ldots), \tag{13}$$

$$\sigma_{+-}=(\ldots,0,1,-1,0,\ldots) \tag{14}$$

であり，$\sigma_n=0$, $(n\neq n_0\pm1)$ である．$n_0$ は，$4\le n_0\le N-4$ を満たす偶数としておく．これらの $\sigma_{++}$ と $\sigma_{+-}$ は，それぞれ，in-phase two-site ＤＢ，および，anti-phase two-site ＤＢを表している．残りのコード列として，以下のものを扱う．

$$\sigma_{+++}=(\ldots,0,1,1,1,0,\ldots), \tag{15}$$

$$\sigma_{++-}=(\ldots,0,1,1,-1,0,\ldots), \tag{16}$$

$$\sigma_{-+-}=(\ldots,0,-1,1,-1,0,\ldots). \tag{17}$$

式中で，$\sigma_n=0$, $(n\neq n_0,n_0\pm2)$ である．$n_0$ は，$5\le n_0\le N-5$ を満たす奇数としておく．これらは，three-site ＤＢを表している．ＤＢ解の存在と線形安定性に関する主結果は，以下のように述べられる．

**定理１．** $\sigma\in\{\sigma_+,\sigma_{++},\sigma_{+-},\sigma_{+++},\sigma_{++-},\sigma_{-+-}\}$，かつ，$T>0$ は任意に与えられた周期とする．このとき，定数 $\varepsilon_c>0$ と $\varepsilon$ に依存する定数 $\delta_r>0$, $r=2,\ldots,k-1$ が存在し，$0<\varepsilon<\varepsilon_c$，かつ，$|\kappa_r|<\delta_r$, $r=2,\ldots,k-1$ のとき，$\varepsilon$ と $\kappa=(\kappa_2,\ldots,\kappa_{k-1})$ に連続的に依存する格子系 (5) の周期解の族 $\{\Gamma_{\varepsilon,\kappa}(t;\sigma,T)\}$ で $\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{\kappa\to0}\|\Gamma_{\varepsilon,\kappa}(0;\sigma,T)-\Gamma_0(0;\sigma,T)\|=0$ を満たすものが存在する．さらに，$\sigma\in\{\sigma_+,\sigma_{+-},\sigma_{-+-}\}$ の場合は $\Gamma_{\varepsilon,\kappa}(t;\sigma,T)$ は線形安定であり，一方，$\sigma\in\{\sigma_{++},\sigma_{+++},\sigma_{++-}\}$ の場合は $\Gamma_{\varepsilon,\kappa}(t;\sigma,T)$ は線形不安定である．

ハミルトニアン (5) のポテンシャル関数 $V$ において，粒子の振幅が充分大きな場合には，最高次の項が支配的になる．したがって，定理１は，必ずしも０に近くない任意の係数 $\kappa_r$, $r=2,\ldots,k-1$ が与えられた場合にも，充分大きな振幅を持つＤＢ解が存在することを意味している．定理１は，それらの大振幅ＤＢ解の線形安定性の評価も与える．

定理１から得られる系を述べるために，いくつかの表記を導入する．(11) 式を考え，積分定数 $h=1$ の場合の周期 $T$ の値を $T_1$ で表すことにする．$T_1$ と $\sigma\in\{\sigma_+,\sigma_{++},\sigma_{+-},\sigma_{+++},\sigma_{++-},\sigma_{-+-}\}$ が与えられたとき，定理１により，パラメータ $\varepsilon$ に関して少なくともある上限 $\varepsilon_c$ まで，周期解 $\Gamma_0(t;\sigma,T_1)$ は延長可能である．この上限を，$\varepsilon_{c,1}(\sigma)$ と表す．次に，定理１における延長により得られる周期解 $\Gamma_{\varepsilon,\kappa}(t;\sigma,T)$ を考える．この解の成分を，$\Gamma_{\varepsilon,\kappa}(t;\sigma,T)=(\phi_{\varepsilon,\kappa}(t;\sigma,T),\psi_{\varepsilon,\kappa}(t;\sigma,T))$ のように表す．ただし，$\phi_{\varepsilon,\kappa}\in\mathbb{R}^{N-1}$,

$\psi_{\varepsilon,\kappa} \in \mathbb{R}^{N-1}$ は，それぞれ，解の座標成分と運動量成分を表す．以下の系が成り立つ．

系 1．$\sigma \in \{\sigma_{+}, \sigma_{++}, \sigma_{+-}, \sigma_{+++}, \sigma_{++-}, \sigma_{-+-}\}$，かつ，$0 < \varepsilon < \varepsilon_{c,1}(\sigma)$ と仮定する．任意に与えられたポテンシャル係数 $\kappa_r \in \mathbb{R}$, $r = 2, \ldots, k-1$ に対し，正の定数 $a_c > 0$ が存在して，$a > a_c$ なるとき次式で与えられる格子系 (5) の局在周期解 $\Phi_a(t; \sigma, \varepsilon, \kappa)$ が存在する．

$$\Phi_a(t; \sigma, \varepsilon, \kappa) = \left( a^{1/k} \phi_{\varepsilon,\hat{\kappa}}(a^{1/2-1/k} t; \sigma, T_1),\ a^{1/2} \psi_{\varepsilon,\hat{\kappa}}(a^{1/2-1/k} t; \sigma, T_1) \right) \tag{18}$$

ただし，$\hat{\kappa} = (\hat{\kappa}_2, \ldots, \hat{\kappa}_{k-1})$ であり，各成分は $\hat{\kappa}_r = a^{r/k-1} \kappa_r$ と定義される．さらに，$\sigma \in \{\sigma_{+}, \sigma_{+-}, \sigma_{-+-}\}$ の場合は $\Phi_a(t; \sigma, \varepsilon, \kappa)$ は線形安定でり，$\sigma \in \{\sigma_{++}, \sigma_{+++}, \sigma_{++-}\}$ の場合は $\Phi_a(t; \sigma, \varepsilon, \kappa)$ は線形不安定である．

証明．スケール変換された変数 $\hat{q}_n$, $\hat{p}_n$, $\tau$ を次式で導入する．

$$q_n = a^{1/k} \hat{q}_n, \quad , p_n = a^{1/2} \hat{p}_n, \quad , t = a^{1/k-1/2} \tau \tag{19}$$

ここで，$a$ は正定数である．これらの変数を用いると，ハミルトニアン (5) は，

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2} \hat{p}_n^2 + \sum_{j=1}^{N/2} \sum_{r=2}^{k} \frac{\hat{\kappa}_r}{r} \Big[ (\varepsilon \hat{q}_{2j} - \hat{q}_{2j-1})^r + (\hat{q}_{2j-1} - \varepsilon \hat{q}_{2j-2})^r \Big] \tag{20}$$

となる．式中で，$\hat{\kappa}_k = 1$，$\hat{\kappa}_r = a^{r/k-1} \kappa_r$, $r = 2, \ldots, k-1$ である．元のハミルトニアン (5) と変換後のハミルトニアン (20) の間には，関係式 $\hat{H} = H/a$ が成り立つ．なお，ハミルトニアン (20) に対する運動方程式は，$d\hat{q}_n/d\tau = \partial \hat{H}/\partial \hat{p}_n$，$d\hat{p}_n/d\tau = -\partial \hat{H}/\partial \hat{q}_n$ となる．

系 (20) で $\varepsilon = 0$，$\hat{\kappa}_r = 0$ の場合の周期解 $\hat{\Gamma}_0(\tau; \sigma, T_1) = (\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_{N-1}, \hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_{N-1})$ を考える．各 $\hat{q}_n$ は，

$$\hat{q}_{2j-1} = 2^{-1/(k-2)} \sigma_{2j-1} \varphi(\tau), \quad \hat{q}_{2j} = 0, \qquad j = 1, \ldots, N/2 \tag{21}$$

とし，$\hat{p}_n$ は $\hat{p}_n = d\hat{q}_n/d\tau$ とする．ただし，$\varphi(\tau)$ は，以下の積分から定まる変数 $\tau$ の周期関数とする．

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{k} \varphi^k = 1. \tag{22}$$

$\hat{\kappa}_r$, $r = 2, \ldots, k-1$ は $\lim_{a \to \infty} \hat{\kappa}_r = 0$ を満たすので，定理 1 により，充分大きな定数 $a_c > 0$ が存在し，$a > a_c$ とするとき $\hat{\Gamma}_0(\tau; \sigma, T_1)$ から延長される系 (20) の周期解が存在する．その周期解は，

$$\hat{\Gamma}_{\varepsilon,\hat{\kappa}}(\tau; \sigma, T_1) = \left( \phi_{\varepsilon,\hat{\kappa}}(\tau; \sigma, T_1), \psi_{\varepsilon,\hat{\kappa}}(\tau; \sigma, T_1) \right) \tag{23}$$

のように与えられる．さらに，$\sigma \in \{\sigma_{+}, \sigma_{+-}, \sigma_{-+-}\}$ ならば $\hat{\Gamma}_{\varepsilon,\hat{\kappa}}(\tau; \sigma, T_1)$ は線形安定であり，$\sigma \in \{\sigma_{++}, \sigma_{+++}, \sigma_{++-}\}$ ならば $\hat{\Gamma}_{\varepsilon,\hat{\kappa}}(\tau; \sigma, T_1)$ は線形不安定である．(23) 式中の独立変数を元の変数に戻す，すなわち，変換 $(\hat{q}_n, \hat{p}_n, \tau) \mapsto (q_n, p_n, t)$ を施すと，元のハミルトン系 (5) に対する周期解 $\Phi_a(t; \sigma, \varepsilon, \kappa)$ が得られる．明らかに，$\sigma \in \{\sigma_{+}, \sigma_{+-}, \sigma_{-+-}\}$ ならば $\Phi_a(t; \sigma, \varepsilon, \kappa)$ は線形安定であり，$\sigma \in \{\sigma_{++}, \sigma_{+++}, \sigma_{++-}\}$ ならば $\Phi_a(t; \sigma, \varepsilon, \kappa)$ は線形不安定である．∎

注 1．周期解 $(q_1(t), \ldots, q_{N-1}(t), p_1(t), \ldots, p_{N-1}(t))$ の振幅は，その座標成分の最大絶対値，すなわち，$\max_{t,n} |q_n(t)|$ として定義することができる．極限 $a \to +\infty$ において，関数 $\phi_{\varepsilon,\hat{\kappa}}(\tau; \sigma, T_1)$ は $\phi_{\varepsilon,0}(\tau; \sigma, T_1)$ に収束する．$\phi_{\varepsilon,0}$ の振幅は，$a$ に依存しないので，(18) 式は，$a$ が充分大きな領域で，周期解 $\Phi_a$ の振幅が近似的に $a^{1/k}$ に比例することを示している．よって，充分大きな $a$ に対する $\Phi_a$ は，大振幅の周期解を表していることが分かる．

## 4 証明の概要

まず，ハミルトン系 (5) が同次ポテンシャル（$\kappa_r = 0,\ r = 2,\ldots,k-1$）を持つ場合における周期解の求め方について触れておく．$\kappa_r = 0,\ r = 2,\ldots,k-1$ の場合，ハミルトニアン (5) は

$$H_0 = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2} p_n^2 + \sum_{j=1}^{N/2} \frac{1}{k}\Big[ (\varepsilon q_{2j} - q_{2j-1})^k + (q_{2j-1} - \varepsilon q_{2j-2})^k \Big] \tag{24}$$

となる．この系の運動方程式は，次式で与えられる．

$$\ddot{q}_{2j-1} = (\varepsilon q_{2j} - q_{2j-1})^{k-1} - (q_{2j-1} - \varepsilon q_{2j-2})^{k-1}, \tag{25}$$

$$\ddot{q}_{2j} = \varepsilon(q_{2j+1} - \varepsilon q_{2j})^{k-1} - \varepsilon(\varepsilon q_{2j} - q_{2j-1})^{k-1}. \tag{26}$$

同次系 (24) の周期解を，以下の形を仮定して探す．

$$q_n(t) = u_n\, \varphi(t), \tag{27}$$

ここで，$u_n \in \mathbb{R},\ n = 1,2,\ldots,N-1$ は定数であり，$\varphi(t)$ は時間変数 $t$ の関数である．全ての $q_n(t)$ に関して，時間依存性を共通の関数 $\varphi(t)$ で記述できると仮定している．(27) 式を，運動方程式 (25)，(26) に代入すると，微分方程式

$$\ddot{\varphi} + \varphi^{k-1} = 0 \tag{28}$$

と，以下の連立代数方程式が得られる．

$$u_{2j-1} + (\varepsilon u_{2j} - u_{2j-1})^{k-1} - (u_{2j-1} - \varepsilon u_{2j-2})^{k-1} = 0, \tag{29}$$

$$u_{2j} + \varepsilon(u_{2j+1} - \varepsilon u_{2j})^{k-1} - \varepsilon(\varepsilon u_{2j} - u_{2j-1})^{k-1} = 0, \tag{30}$$

式中で，$j = 1,2,\ldots,N/2$ である．3 節で述べたように，任意の $T > 0$ に対し，微分方程式 (28) は周期 $T$ の周期解を持つ．したがって，もし代数方程式 (29)，(30) の解 $u = (u_1,\ldots,u_N)$ が存在したならば，元の運動方程式 (25)，(26) に $T$-周期解が存在することになる．定理 1 の証明は，以下に記述する step1 から step3 従って行われる．

**Step 1:** $\varepsilon = 0$，同次系 $\kappa = 0$ の場合．

同次系の anti-continuous limit を考える．すなわち，$\varepsilon = 0$ のときの連立代数方程式 (29)，(30) を考える．このとき，方程式は分離して，

$$u_{2j-1} - 2\,u_{2j-1}^{k-1} = 0, \quad u_{2j} = 0 \tag{31}$$

のようになる．次式の形をした解が存在することが容易に分かる．

$$u_{2j-1} = 2^{-1/(k-2)} \sigma_{2j-1}, \quad u_{2j} = 0, \qquad j = 1,\ldots,N/2, \tag{32}$$

ここで，$\sigma_{2j-1} \in \{-1,0,1\}$ である．任意の $\sigma = (\sigma_1,\sigma_3,\ldots,\sigma_{2j-1},\ldots,\sigma_{N-1}) \in \{-1,0,1\}^{N/2}$ に対し，(32) 式は方程式 (31) の解であるので，非常に多くの解が存在する．与えられた $\sigma \in \{-1,0,1\}^{N/2}$ に対する解 (32) を $u_\sigma \in \mathbb{R}^{N-1}$ と表記する．$u_\sigma$ と周期関数 $\varphi(t)$ を (27) 式に代入すれば，運動方程式 (25)，(26) の周期解 $\Gamma_0(t;\sigma,T)$ が得られる．特に，$\sigma \in \{\sigma_+,\sigma_{++},\sigma_{+-},\sigma_{+++},\sigma_{++-},\sigma_{-+-}\}$ とすれば，定理 1 で扱

うＤＢ解となる．

**Step 2**: $\varepsilon > 0$，同次系 $\kappa = 0$ の場合．

Step 1 で構成したＤＢ解を，同次ポテンシャルに保ったままで，$\varepsilon > 0$ の領域に延長する．同次系なので，連立代数方程式 (29)，(30) の解の延長のみを考えればよい．(29)，(30) 式の左辺を，$F(u, \varepsilon)$ と表す．$F : \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N-1}$ は，$C^\omega$ 関数である．$F(u_\sigma, 0) = 0$，かつ，$\det(\partial F(u_\sigma, 0)/\partial u) \neq 0$ であるので，陰関数定理により，$\varepsilon_c > 0$ と $C^\omega$ 関数 $u_n(\varepsilon;\sigma)$, $n = 1, \ldots, N-1$ が存在し，$\varepsilon \in (-\varepsilon_c, \varepsilon_c)$ の範囲で $(u_1(\varepsilon;\sigma), \ldots, u_{N-1}(\varepsilon;\sigma))$ は連立代数方程式 (29)，(30) を満たし，かつ，$(u_1(0;\sigma), \ldots, u_{N-1}(0;\sigma)) = u_\sigma$ であることが示される．すなわち，代数方程式の解 $u_\sigma$ は延長可能である．この $u_n(\varepsilon;\sigma)$ を (27) 式に代入すると，延長されたＤＢ解 $\Gamma_\varepsilon(t;\sigma,T)$ が次式のように得られる．

$$q_n(t) = u_n(\varepsilon;\sigma)\varphi(t),\ p_n(t) = u_n(\varepsilon;\sigma)\dot{\varphi}(t), \quad n = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{33}$$

次に，ＤＢ解 $\Gamma_\varepsilon(t;\sigma,T)$ に関する変分方程式を考え，モノドロミー行列を $\mathcal{M}$ で表す．以下では，$\varepsilon \in (0, \varepsilon_c)$ とし，$\varepsilon_c$ は充分小さく取るものとする．変分方程式は $N-1$ 変数の２階連立微分方程式であるが，同次ハミルトン系の周期解 (27) に関する変分方程式の場合には，独立した $N-1$ 個の１変数２階微分方程式に分離可能である．その各１変数２階微分方程式は，独立変数の変換により超幾何微分方程式に変換できることが知られている [16]．この事実を利用して，モノドロミー行列 $\mathcal{M}$ の特性乗数を評価することが可能である．$\mathcal{M}$ はシンプレクティック行列なので，その特性乗数は $\rho$, $\rho^{-1}$ のようなペアをなす．$N-1$ 個の特性乗数ペアの内，複素平面上で単位円上に無いペアの数を $n_u$ で表す．$n_u$ はコード列 $\sigma$ に依存し，$\sigma \in \{\sigma_+, \sigma_{+-}, \sigma_{-+-}\}$ のとき $n_u = 0$，$\sigma \in \{\sigma_{++}, \sigma_{+++}, \sigma_{++-}\}$ のとき $n_u \geq 1$ であることが示される．$n_u \geq 1$ のとき，解は線形不安定となる．さらに，特性乗数には $+1$ が含まれ重複度２であること，および，$+1$ 以外の単位円上にある特性乗数が $\rho \neq -1$ であることが示される．$|\rho| = 1$，かつ，$\rho \neq \pm 1$ であるような特性乗数について，全てが同一の Krein 符号 [17] を持つことも示される．

**Step 3**: $\varepsilon > 0$，非同次系 $\kappa \neq 0$ の場合．

$\varepsilon \in (0, \varepsilon_c)$ を固定する．周期解 $\Gamma_\varepsilon(t;\sigma,T)$ の特性乗数＋１の重複度が２であるので，周期解の延長定理（例えば，[18] 参照）により，$\delta_r > 0$, $r = 2, \ldots, k-1$ が存在し $\kappa \in \{\kappa \in \mathbb{R}^{k-2}; |\kappa_r| < \delta_r,\ r = 2, \ldots, k-1\}$ の範囲で $\Gamma_\varepsilon(t;\sigma,T)$ は延長可能である．延長された解を，$\Gamma_{\varepsilon,\kappa}(t;\sigma,T)$ で表す．特性乗数は $\kappa$ に連続的に依存するので，$\kappa = 0$ で $n_u \geq 1$ の場合，$\kappa$ を $\kappa = 0$ から微小変化させた後も $n_u \geq 1$ のままである．一方，$\kappa = 0$ で $n_u = 0$ の場合を考える．$\rho = \rho^{-1} = +1$ は，$\kappa$ に依らず不変である．重複していない特性乗数は，$\kappa$ の微小変化の下で明らかに単位円上にとどまる．$+1$ 以外の重複している特性乗数が在る場合も，$\kappa = 0$ のとき特性乗数は同一 Krein 符号を持つので，$\kappa$ を $\kappa = 0$ から微小変化させたときに Krein collision による不安定化は起き得ないことが示される [17]．すなわち，$\kappa$ の微小変化の下で $n_u = 0$ に保たれる．以上より，$\delta_r > 0$ を充分小さく取れば，$\Gamma_{\varepsilon,\kappa}(t;\sigma,T)$ は $\Gamma_\varepsilon(t;\sigma,T)$ と同様の線形安定性を持つと結論される．

## 参考文献

[1] S. Takeno, K. Kisoda, and A. J. Sievers, "Intrinsic localized vibrational modes in anharmonic crystals: stationary modes," Prog. Theor. Phys. Suppl. 94, 242–269 (1988).

[2] A. J. Sievers and S. Takeno, "Intrinsic localized modes in anharmonic crystals," Phys. Rev. Lett. 61, 970–973 (1988).

[3] S. Aubry, "Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization," Physica D 103, 201–250 (1997).

[4] S. Flach and C. Willis, "Discrete breathers," Phys. Rep. 295, 181–264 (1998).

[5] S. Aubry, "Discrete breathers: localization and transfer of energy in discrete Hamiltonian nonlinear systems," Physica D 216, 1–30 (2006).

[6] E. Trias, J. J. Mazo, and T. P. Orlando, "Discrete breathers in nonlinear lattices: Experimental detection in a Josephson array," Phys. Rev. Lett. 84, 741–744 (2000).

[7] P. Binder, D. Abraimov, A. V. Ustinov, S. Flach, and Y. Zolotaryuk, "Observation of breathers in Josephson ladders," Phys. Rev. Lett. 84, 745–748 (2000).

[8] H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, A. R. Boyd, and J. S. Aitchison, "Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays," Phys. Rev. Lett. 81, 3383-3386 (1998).

[9] M. Sato, B. E. Hubbard, A. J. Sievers, B. Ilic, D.A. Czaplewski, and H. G. Craighead, "Observation of locked intrinsic localized vibrational modes in a micromechanical oscillator array," Phys. Rev. Lett. 90, 044102 (2003).

[10] R. S. MacKay and S. Aubry, "Proof of existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators," Nonlinearity 7, 1623–1643 (1994).

[11] V. Koukouloyannis and S. Ichtiaroglou, "Existence of multibreathers in chains of coupled onedimensional Hamiltonian oscillators," Phys. Rev. E 66, 066602 (2002).

[12] R. Livi, M. Spicci, and R. S. MacKay, "Breathers on a diatomic FPU chain," Nonlinearity 10, 1421–1434 (1997).

[13] S. Flach, "Existence of localized excitations in nonlinear Hamiltonian lattices," Phys. Rev. E 51, 1503–1507 (1995).

[14] S. Aubry, G. Kopidakis, and V. Kadelburg, "Variational proof for hard discrete breathers in some classes of Hamiltonian dynamical systems," Discrete and Continuous Dynamical Systems B 1, 271-298 (2001).

[15] G. James and P. Noble, "Breathers on diatomic Fermi-Pasta-Ulam lattices," Physica D 196, 124–171 (2004).

[16] H. Yoshida, "Existence of exponetially unstable periodic solutions and the non-integrability of homogeneous Hamiltonian systems," Physica D 21, 163–170 (1986).

[17] V. I. Arnold and A. Avez, *Ergodic problem of classical mechanics* (Springer-Verlag, Berlin, 1978).

[18] K. R. Mayer and G. R. Hall, *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and N-body problem*, (Springer-Verlag, New York, 1992).